現代プログラミング言語論
Ch6. Observation Equivalence: Theory

創造情報学専攻 M1

76602. グェン トアン ドゥク

Observation equivalence

- これまでは structural equivalenceと strong bisimulationについて論じた
  - システムのobservable actions (observation)だけでなく、unobservable actions (reactions)も一致しなければならない
  - しかし重要なのはobservable actions
- システムのinternal behaviorは考えなく、observationが同じであればequivalent
- Observation equivalence, weak bisimulation

6.1. Experiment relations

- Experiment e = $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ を行うとはprocessに対してそのobservation列を作る
- Experiment eを行うときに、システム内部のreationsが起こったかどうか分からない
- Experiment relations

$$\Rightarrow \overset{def}{=} \rightarrow^* \qquad \text{(P ⇒Q は P → … → Q)}$$

$$\overset{s}{\Rightarrow} \overset{def}{=} \Rightarrow \overset{\alpha 1}{\rightarrow} \Rightarrow \overset{\alpha 2}{\rightarrow} \ldots . \Rightarrow \overset{\alpha n}{\rightarrow}$$

$$(P \overset{s}{\Rightarrow} Q \iff P \Rightarrow \overset{\alpha 1}{\rightarrow} P_1 \Rightarrow \overset{\alpha 2}{\rightarrow} \ldots . \Rightarrow \overset{\alpha n}{\rightarrow} P_n \Rightarrow Q)$$

6.2. Weak bisimulation

- Sはρ上の二項関係、Sはweak simulation　　とはP S Q のとき、

$$\text{if } P \overset{e}{\Rightarrow} P' \text{ then } \exists Q' \in \rho \text{ s.t. } Q \overset{e}{\Rightarrow} Q' \text{ and } P'SQ'$$

- Q weakly simulates P if ∃S s.t. P S Q
- Strong simulationと似ている定義

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, Rightarrow, "e"'] & S & Q \arrow[d, Rightarrow, "e"] & \exists Q' \\ P' & S & Q' & \end{tikzcd}$$

Weak simulation

- Prop. 6.3: S is a week simulation if and only if, whenever P S Q

$$\text{if } P \to P' \text{ then } \exists Q' \in \rho \text{ s.t. } Q \Rightarrow Q' \text{ and } P'SQ'$$

$$\text{if } P \xrightarrow{\lambda} P' \text{ then } \exists Q' \in \rho \text{ s.t. } Q \overset{\lambda}{\Rightarrow} Q' \text{ and } P'SQ'$$

- 証明:
  - (⇒) Weak simulationの定義から分かる
  - (🡐) eの長さについての帰納法
    - まずSはtransitiveを証明 S1, S2がweak simulationなら、S = S1S2 = { (p, r) | ∃q: (p, q) ∈S1, (q,r) ∈S2} も
    - そして、e = e' λ_nとして帰納仮定と2番の条件を使う….

Strong と Weak simulation

- Every strong simulation is also a weak one
- 証明:
  - $P \sim Q$, $P \rightarrow P'$ならば、

    $\exists Q'$ s.t. $Q \rightarrow Q' \land P' \sim Q'$
  - $P \xrightarrow{\lambda} P'$の時も同様

    であるから Prop. 6.3より ~ も weak simulation

Weak bisimulation and equivalence

- A binary relation S over ρ is said to be a weak bisimulation if both S and its converse are weak simulations
- P and Q are weakly bisimilar
  - Weakly equivalentとも言う
  - Oservation equivalentとも言う
  - $P \approx Q$ と書く
- Strong bisimulationと似ている定義

~ と ≈との関係

- Prop. 6.6.
  - $P \sim Q \Rightarrow P \approx Q$
  - 証明: Prop 6.4による

≈ のproperties (Prop. 6.7)

- ≈ は同値関係
  - 証明:
    - Reflexivity: P ≈ P は自明
    - Symmetry: P ≈ Q ⇒ Q ≈ Pは定義による
    - Transitivity: S1, S2がweak bisimulationであれば、
      S = S1S2 = { (p, r) | p S1 q, q S2 r }はweak bisimulation
- ≈ 自身はweak bisimulation
  - 証明:
    - P ≈ Qとすると、P $\xrightarrow{\lambda}$P'ならヨQ': Q $\overset{\lambda}{\Rightarrow}$ Q' s.t. P' ≈ Q'なので≈はweak simulation. ≈ のconverseも同様。
- Strong equivalenceにもあった性質

Weak simulation up to ~ (Def. 6.8)

- Binary relation S is weak simulation up to ~ if, whenever P S Q,
  - If $P \rightarrow P'$ then $\exists Q'$ s.t. $Q \Rightarrow Q'$ and $P' \sim S \sim Q'$
  - If $P \xrightarrow{\lambda} P'$ then $\exists Q'$ s.t. $Q \overset{\lambda}{\Rightarrow} Q'$ and $P' \sim S \sim Q'$
- S is a weak bisimulation up to ~ if S^{-1} also has this property.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\lambda"'] & S & Q \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\
P' & \sim S \sim & Q'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\lambda"'] & S & Q \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\
P' & \sim S \sim & Q'
\end{tikzcd}
$$

Weak bisimulation up to ~ and ≈

- Prop. 6.9: If S is a weak bisimulation up to ~ and P S Q then P ≈ Q
- 証明: ~S~ がweak bisimulationと証明. P ~S~ Qとすると∃P1, Q1, s.t.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\lambda"'] & \sim & P1 \arrow[d, "\lambda"] \\
P' & \sim & P'_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P1 \arrow[d, "\lambda"'] & S & Q1 \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\
P'_1 & \sim S \sim & Q'_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q1 \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"'] & \sim & Q \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\
Q'_1 & \sim & Q
\end{tikzcd}
$$

であるから、

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\lambda"'] & \sim S \sim & Q \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\
P' & \sim S \sim & Q'
\end{tikzcd}
$$

同様

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[d] & \sim S \sim & Q \arrow[d, Rightarrow] \\
P' & \sim S \sim & Q'
\end{tikzcd}
$$

Strongとweakの違い: τ sensitivity

- Example 6.10:

  A = a.A'　　B = b.B'

  A' = $\overline{\text{b}}$.A　　B' = $\overline{\text{c}}$.B

P = new b (A|B)とし、

  E = a.E',　　E' = a.E'' + $\overline{\text{c}}$.E,　　E'' = $\overline{\text{c}}$.E'

とすると P ≈ E (E は τ transitionを持たない)

証明: { (new b (A|B), E), (new b (A'|B), E'),

(new b (A|B'), E'), (new b (A'|B'), E'') }

はweak bisimulationである

Weak bisimulationの証明は次のスライド

Exercise 6.11

- 全スライドの関係がweak bisimulationの証明(Prop. 6.3により)

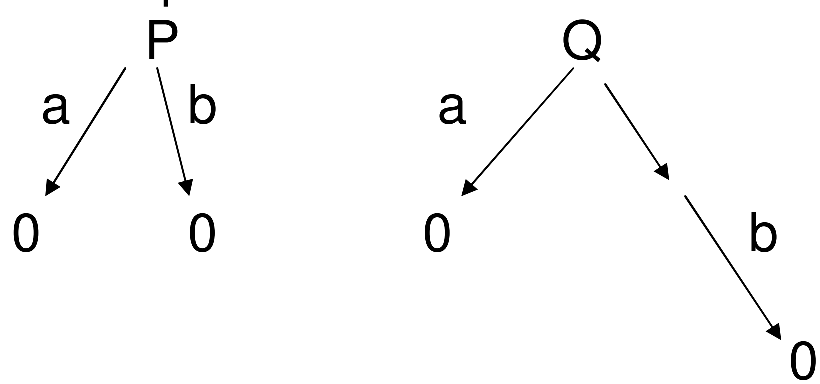
$$
\begin{tikzcd}
\text{new b (A|B)} \arrow[d, "a"'] \arrow[r, phantom, "\approx"] & E \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\
\text{new b (A'|B)} \arrow[r, phantom, "\approx"] & E'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{new b (A'|B)} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\approx"] & E' \arrow[d, Rightarrow, red] \\
\text{new b (A|B')} \arrow[r, phantom, "\approx"] & E'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{new b (A|B')} \arrow[d, "a"'] \arrow[r, phantom, "\approx"] & E' \arrow[d, Rightarrow, "a"] \\
\text{new b (A'|B')} \arrow[r, phantom, "\approx"] & E''
\end{tikzcd}
$$

他のtransitionも同様

Weakly non- τ reducibility (Example 6.12)

- 全てのprocessがnon- τ transition processにweakly equivalent的にreduceできるわけではない
- Example 6.2:



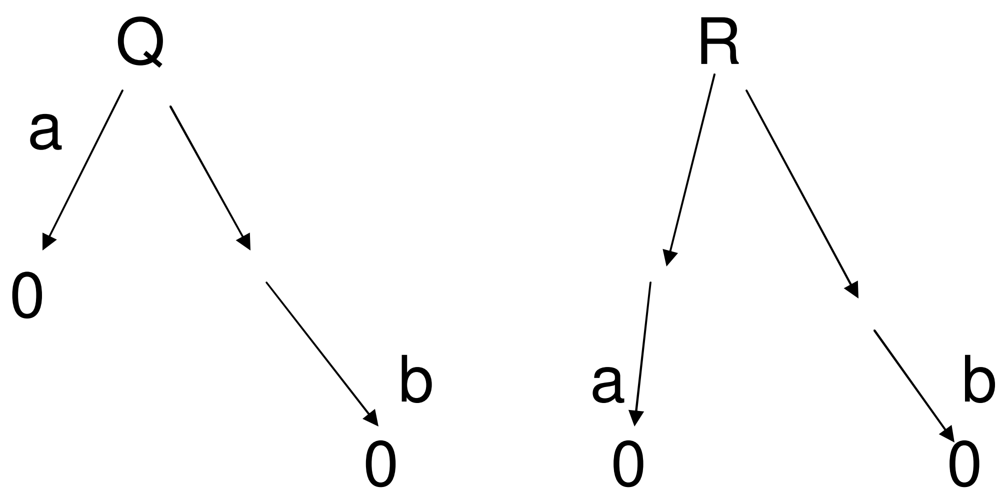
$P = a + b$

$Q = a + \tau .b$

- PとQはweakly equivalentではない
  - (P, Q) ∈S なら、Q →b.0 なので、∃P' s.t. P ⇒P' ∧ (P', b.0) ∈S。しかし図を見ると P' = P である。よって、(P, b.0) ∈Sが、P ーa→ 0であり、b.0はaのaction列がない ⇒ 矛盾

Exercise 6.13

- Q, Rがweakly equivalentではない



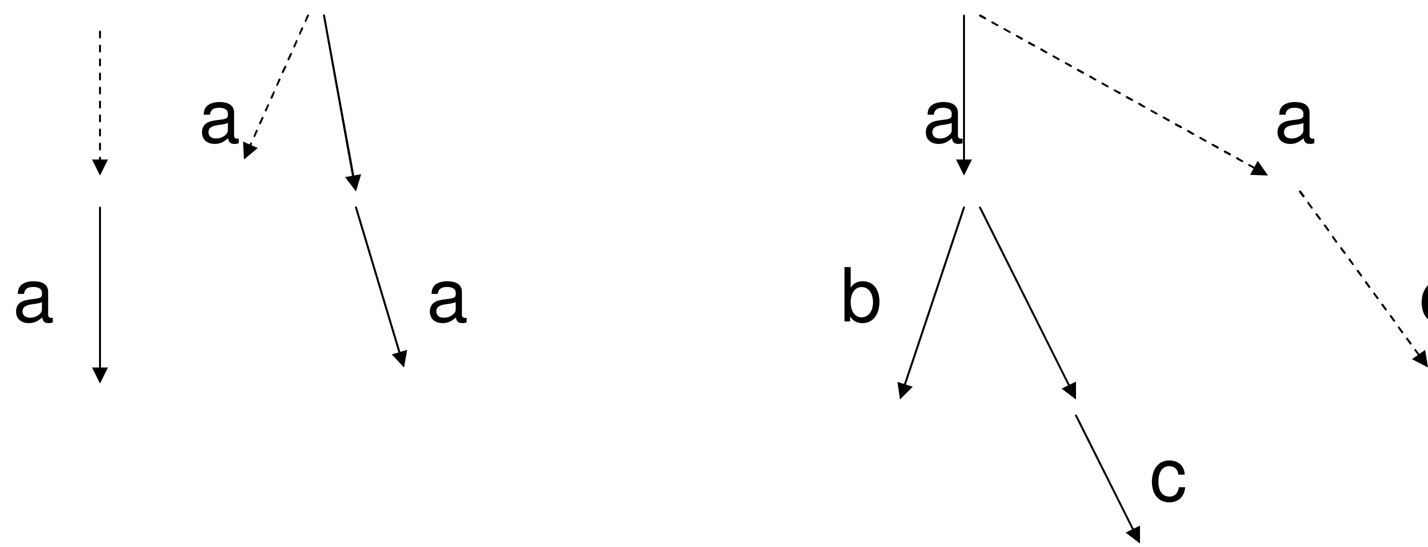
$Q = a + \tau b$

$R = \tau a + \tau b$

- (R, Q) ∈Sなら R→a.0であるから、(Q, a.0) ∈S
- しかしQ→b.0がa.0にはそん列がない
- (P, R)も同様

Some equivalences (Example 6.14)

- 次の図のdashed transitions は削除可能(weak equivalenceを保つ)



$a \approx \tau a \quad a + \tau a \approx \tau a \quad a(b + \tau c) + ac \approx a(b + \tau c)$

Varying the pattern of τ transition

- Theorem 6.15:
  - If $P \in \rho$, M, N: summations, then
    - ① $P \approx \tau P$
    - ② $M + N + \tau N \approx M + \tau N$
    - ③ $M + \alpha P + \alpha(\tau P + N) \approx M + \alpha(\tau P + N)$

余分

- 証明:
  - (1): $\{(P, \tau P)\} \cup Id_\rho$ がweak bisimulation
  - (2): $\{(M + N + \tau N, M + \tau N)\} \cup Id_\rho$ がweak bisimulation
  - (3): $\{(M + \alpha P + \alpha(\tau P + N), M + \alpha(\tau P + N))\} \cup Id_\rho$ がweak bisimulation

Exercise 6.16

- 全スライドの(2) $M + N + \tau N \approx M + \tau N$ は次の (*)と同値 (M, Nはsummations)
  - $M + \alpha P + \tau(\alpha P + N) \approx M + \tau(\alpha P + N)$ (*)
- 証明:
- (➔) (2)で$N = \alpha P + N'$とすると
  $M + \alpha P + \tau(\alpha P + N') \approx M + \alpha P + N' + \tau(\alpha P + N') \approx M + \tau(\alpha P + N')$
- (🡐)$N = \alpha P + N'$とすると、(*)により
  $M + \alpha P + \tau(\alpha P + N') \approx M + \tau(\alpha P + N')$

また、$M + \alpha P + \tau(\alpha P + N') \approx M + (\alpha P + N') + \tau(\alpha P + N')$

よって、$M + N + \tau N \approx M + \tau N$

- (3)と(*)はαPが余分と言っているが、(3)と(*)両方があるとτはαPの前でも、後ろでも構わない。したがって、(2), (3)両方あると、τの位置は構わない

Weak process congruence

- Weak equivalence is a process congruence; that is, if $P \approx Q$ then
  1. $\alpha P + M \approx \alpha Q + M$
  2. new a $P \approx$ new a Q
  3. $P \mid R \approx Q \mid R$
  4. $R \mid P \approx R \mid Q$
- 証明: strong equivalence (page 51)と同じように
- (1)では、$P \approx Q$であっても、α-prefixedが必要
  – $b \approx \tau b$ であるが、$a + b \neg\approx a + \tau b$ (Example 6.12)
  – Partial summationを置き換えてはダメ

6.3. Unique solution of equations

- 連立方程式を解く

EijはX1, … Xnを含む

$$X_1 \approx \alpha_{11}E_{11} + \ldots + \alpha_{1n}E_{1n_1}$$

$$X_1 \approx \alpha_{21}E_{21} + \ldots + \alpha_{2n}E_{2n_2}$$

- 例:　X ≈ a.X + b.Y　(1)

  　　Y ≈ c.X　　　　(2)
  - 解はX ≈ A =^{def} a.A + b.B, Y ≈ B =^{def} c.A
  - 上記の解は唯一(P, Qが(1), (2)を満たしたら P ≈ A, Q ≈ B)
- しかし、X ≈ τ .X はどんなprocessでも解

Exercise 6.18

- $X \approx a.P + \tau.X$ とすると、任意Qについて $(a.P + \tau.Q)$が解
- 証明:
  - 右辺　$a.P + \tau.(a.P + \tau.Q) \approx \tau(a.P + \tau.Q) \approx a.P + \tau.Q$

Unique solution of equations (Theorem 6.19)

$$\overrightarrow{X} = X_1, X_2, \ldots (\text{ may be infinite})$$

$$\mathrm{X}_1 \approx \alpha_{11} X_{k(11)} + \ldots + \alpha_{1n_1} X_{k(1n_1)} \qquad (\alpha_{\mathrm{ij}} \neq \tau)$$

$$\mathrm{X}_1 \approx \alpha_{21} X_{k(21)} + \ldots + \alpha_{2n_2} X_{k(2n_2)}$$

$$\ldots$$

- ≈については唯一な解(P1, P2, …)がある

Th6.19の証明

- i番目の方程式の右辺を$M_i[\vec{X}]$と書く
- $\vec{P}$, $\vec{Q}$が2つの解とする($P_i \approx M_i[\vec{P}]$, $Q_i \approx M_i[\vec{Q}]$)
- $P_i \approx Q_i$ を証明、つまり
  $S = \{ (P, Q) \mid P \approx P_i \land Q \approx Q_i \text{ for some } i\}$
  がweak bisimulation
- 任意の(P, Q)∈Sを取る
  - $P \Rightarrow P'$なら、∃P'': $P \approx P_i \approx M_i[\vec{P}] \Rightarrow P'' \approx P'$. しかし、$\alpha_{ij} \neq \tau$なので、⇒transitionしてもそのまま。よって、$P \approx P'$であり、$Q' = Q$を選ぶと$(P', Q') \in S$
  - $P \overset{\lambda}{\Rightarrow} P'$なら、$\overset{\lambda}{\rightarrow}$
    $$P \approx P_i \approx M_i[P] \rightarrow P_k \Rightarrow P'' \approx P' \quad (\text{where } \lambda = \alpha_{ij}, P_k = P_{k(ij)})$$
    よって $P_k \approx P'$
  - また、$M_i[\vec{Q}] \overset{\lambda}{\rightarrow} Q_k$であるが、$Q \approx Q_i \approx M_i[\vec{Q}]$なので$Q \overset{\lambda}{\Rightarrow} Q' \approx Q_k \approx P_k \approx P'$

まとめ

- Weak bisimulation: 内部 τ transitionが違ってもequivalentと考えられる
- Weak equivalence (≈): strong equivalenceと似ているpropertiesを持っているが、他の特殊的なpropertiesも持つ
  - $P \approx \tau.P$
- 連立方程式がある条件の下で唯一解を持つ
- 次の章はこの理論の応用